Noten
Els Coussement

In het afgelopen half jaar hebben we met zijn allen anders leren denken. We leven meer van dag tot dag en genieten meer van onze eigen streek. In het onderwijs hebben we volledig nieuwe paden moeten betreden. Maar gelukkig blijft één iets bij het oude: de notenrubriek in Wiskunde en Onderwijs. Veel plezier bij het kraken van de onderstaande nootjes!

OPGAVEN

Noot 184.1: Arthur en zijn getallen ①

Arthur schrijft vijf verschillende strikt positieve gehele getallen kleiner dan 10 op. Tel je twee van deze vijf getallen bij elkaar op, dan komt daar nooit 10 uit.
Welk getal heeft Arthur zeker opgeschreven?

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade, januari 2019, A-vragen opgave 1 - © Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade.

Noot 184.2: verschillende fietsen ①

Agatha, Isa en Nick hebben alle drie een ander soort fiets. Eén van hen heeft een elektrische fiets, één heeft een racefiets en één heeft een mountainbike. De fietsen hebben elk een andere kleur: groen, blauw of zwart. De drie eigenaren formuleren elk twee uitspraken, waarvan één uitspraak waar is en één uitspraak vals.

- Agatha zegt: “Ik heb een elektrische fiets. Isa heeft een blauwe fiets.”
- Isa zegt: “Ik heb een mountainbike. Nick heeft een elektrische fiets.”
- Nick zegt: “Ik heb een blauwe fiets. De racefiets is zwart.”

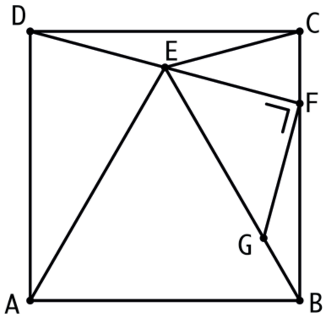
Precies één van de volgende beweringen is met zekerheid waar. Welke?

a) Agatha heeft een groene fiets.
b) Agatha heeft een mountainbike.
c) Isa heeft een groene fiets.
d) Isa heeft een mountainbike.
e) Nick heeft een elektrische fiets.

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade, januari 2019, A-vragen opgave 7 - © Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade.

Noot 184.3: verhouding in vierkant ②

In de tekening hieronder is $ABCD$ een vierkant en ΔABE een gelijkzijdige driehoek. De rechte DE snijdt de rechte BC in punt F. G is het punt op $[EB]$ zodat $DF \perp GF$. Bepaal de verhouding $\frac{|FG|}{|EC|}$.



La 31ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, examen semifinal 2019, problema 44.

Noot 184.4: tabel kleuren ④

In een tabel met twee rijen en vijf kolommen wordt elk van de tien vakjes zwart of wit gekleurd volgens deze regels:

- Twee kolommen die direct naast elkaar staan mogen nooit evenveel zwarte vakjes hebben.
- Twee 2×2-vierkanten die elkaar in één kolom overlappen mogen nooit evenveel zwarte vakjes bevatten.

Hoeveel mogelijke kleuringen van zo'n tabel bestaan er die aan deze regels voldoen?

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade, januari 2019, A-vragen opgave 5 - © Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade.

Noot 184.5: bewijs ⑤

Stel dat je weet dat $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$. Toon aan dat $x+y=0$.

Ingezonden door Edward Omey.

OPLOSSINGEN

Noot 183.1: het Lucasprobleem ①

Elke dag op het middaguur verlaat een schip Le Havre richting New York en op hetzelfde tijdstip vertrekt een schip uit New York richting Le Havre. Elke overtocht duurt precies 7 dagen en 7 nachten. Hoeveel schepen die een trip New York – Le Havre maken, zullen een schip dat vanuit Le Havre vertrekt ontmoeten gedurende de overtocht naar New York? Voor alle duidelijkheid, wanneer het ene schip net vertrekt en het andere schip op hetzelfde ogenblik toekomt in de haven, spreken we niet van een ontmoeting tijdens de overtocht.

Dit probleem staat bekend als het trans-Atlantisch probleem van de Franse wiskundige Edouard Lucas (19de eeuw).

Oplossing

We focussen op het schip A dat vandaag uit Le Havre vertrekt. Op het moment dat schip A vertrekt, zijn er nog 6 schepen bezig met de overtocht van New York naar Le Havre, namelijk de schepen die gisteren, eergisteren, drie dagen geleden, vier dagen geleden, vijf dagen geleden en zes dagen geleden in New York vertrokken. Deze schepen zal schip A zeker ontmoeten.

Uiteraard zal schip A ook het schip ontmoeten dat vandaag vanuit New York richting Le Havre vertrekt.

Verder zal schip A ook alle schepen ontmoeten die in New York zullen vertrekken terwijl schip A bezig is met de overtocht. Dat zijn dus de schepen die morgen, overmorgen, over drie dagen, over vier dagen, over vijf dagen en over zes dagen zullen vertrekken. Dat zijn er dus nog eens 6.

Antwoord: het schip A zal 13 schepen ontmoeten tijdens de overtocht.

Noot 183.2: één voorop of één achterop … bij Katinka ②

Katinka heeft een natuurlijk getal van 5 cijfers in gedachten. Het getal van 6 cijfers dat je krijgt door het cijfer 1 achteraan toe te voegen, is driemaal zo groot is als het getal van 6 cijfers dat je krijgt door het cijfer 1 vooraan toe te voegen. Welk getal heeft Katinka in gedachten?

Oplossing

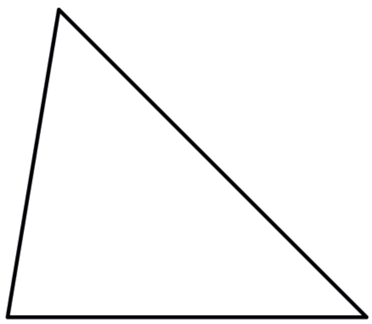
Stel dat x het getal met 5 cijfers is. Dan is $10x + 1$ het getal dat je krijgt door het cijfer 1 achteraan toe te voegen. Bovendien is $100\,000 + x$ het getal dat je krijgt door het cijfer 1 vooraan toe te voegen. Nu geldt:

$$10x + 1 = 3 \cdot (100\,000 + x)$$
$$\Leftrightarrow 7x = 299\,999$$
$$\Leftrightarrow x = 42\,857$$

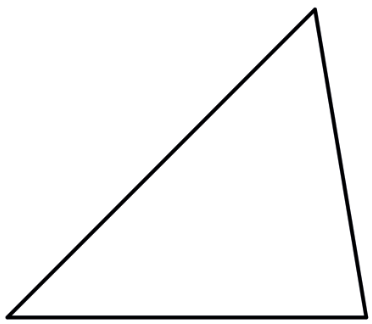
Antwoord: Katinka heeft het getal 42 857 in gedachten.

Noot 183.3: Natasha knipt verkeerd ②

Bij het herstellen van een gat in een fluwelen stuk stof heeft Natasha een driehoek (zie figuur 1) op maat uitgeknipt die over het gat moet genaaid worden. Nu blijkt dat ze bij het uitknippen de stof omgekeerd heeft gelegd. Spijtig genoeg heeft ze niet meer voldoende stof over om een gespiegelde driehoek (zie figuur 2) uit te knippen. Haar man Dmitri heeft gelukkig wat meetkundig inzicht en beweert dat het mogelijk is de driehoek van figuur 2 te maken door de driehoek van figuur 1 in drie stukken te knippen en de drie stukken te herschikken (zonder de stof om te draaien). Hoe zal Natasha moeten knippen?



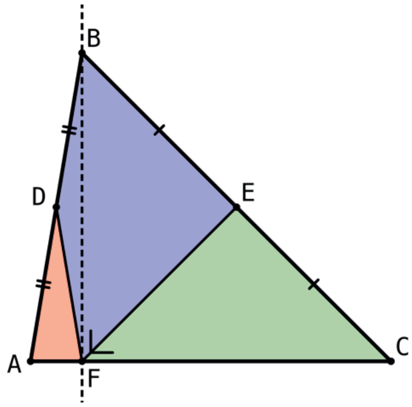
Figuur 1



Figuur 2

Oplossing

We vertrekken van de driehoek van figuur 1 en geven de hoekpunten een naam zoals in de figuur hieronder. Bepaal het punt D, het midden van $[AB]$, en het punt E, het midden van $[BC]$. Bepaal ook het punt F, het voetpunt van de hoogtelijn uit A op $[AC]$. Knip de driehoek in drie stukken volgens de lijnstukken $[DF]$ en $[EF]$.



In een rechthoekige driehoek is de zwaartelijn naar de schuine zijde gelijk aan de helft van de schuine zijde. Als we dit toepassen in ΔAFB en ΔCFB dan vinden we dat $|DF| = |DB| = |AD|$ en $|BE| = |FE| = |EC|$.

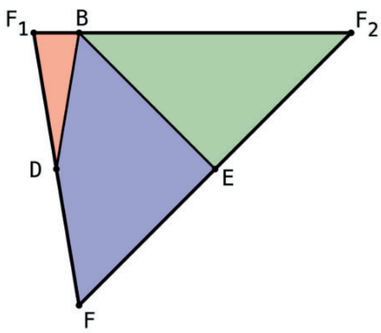
De basishoeken in een gelijkbenige driehoek zijn even groot. We passen dit toe in $\Delta ADF, \Delta FDB, \Delta FEB$ en ΔFEC en vinden dat

$$F\hat{A}D = A\hat{F}D$$

$$D\hat{F}E = D\hat{F}B + B\hat{F}E = D\hat{B}F + F\hat{B}E = D\hat{B}E$$

$$C\hat{F}E = F\hat{C}E$$

Vervolgens voeren we twee rotaties uit: we roteren de rode driehoek rond punt D zodat het beeld van A samenvalt met B en we roteren de groene driehoek rond punt E zodat het beeld van C samenvalt met B.



Als we nu de volledige driehoek over $180°$ draaien, dan vinden we de driehoek van figuur 2.

Noot 183.4: tussen Orjol en Koersk ④

De spoorwegdirectie besluit dat er op de lijn tussen Orjol en Koersk enkele (meer dan één) nieuwe stations moeten bijkomen. In elk bestaand station en ook in elk nieuw station worden tickets verkocht naar alle andere stations op die lijn. Wanneer die nieuwe tussenstations er komen, zullen er in totaal 46 bijkomende soorten tickets moeten gedrukt worden. Hoeveel stations zijn er momenteel en hoeveel zullen er bijkomen?

Oplossing

Stel dat er momenteel x stations zijn op de lijn tussen Orjol en Koersk. Neem station A op deze lijn. Vanuit dit station kan je naar elk ander station gaan. Er zijn dus $x-1$ tickets waarop A als vertrekstation staat. In totaal zijn er momenteel dus $x(x-1)$ soorten tickets.

Stel dat er nu y stations bijkomen. Dat betekent dat er nu $x+y$ stations zijn, of dus $(x+y)(x+y-1)$ soorten tickets.

Er worden 46 nieuwe soorten tickets gedrukt:

$$(x+y)(x+y-1)-x(x-1)=46$$
$$\Leftrightarrow y^2+2xy-y=46$$
$$\Leftrightarrow y(y+2x-1)=46$$

We bekijken de delers van 46: $1, 2, 23, 46$. Aangezien er meer dan één station bijkomt, kan y niet gelijk zijn aan 1. Als $y=2$ dan is $x=11$. Voor de variabele y moeten we de waarden 23 en 46 uitsluiten aangezien x dan een negatieve waarde zou aannemen.

<u>Antwoord</u>: er zijn momenteel 11 stations op deze lijn en er zullen 2 stations bijgebouwd worden.

Noot 183.5: Adelaida Fraksjonow rekent zich een breuk ⑥

Adelaida Fraksjonow schreef enkele breuken op waarvan de teller en noemer positieve gehele getallen zijn en rangschikte ze van klein naar groot. Daarna berekende ze de breuk waarvan de teller de som is van de tellers van de gekozen breuken en de noemer de som van de noemers. Volgens haar bevindingen is het altijd zo dat de resulterende breuk groter is dan of gelijk is aan de kleinste van de gekozen breuken en kleiner is dan of gelijk aan de grootste. Bewijs.

Voorbeeld: $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{4} \leq \frac{5}{6}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} \leq \frac{1+2+5}{2+4+6} \leq \frac{5}{6}$

Oplossing

Kies n breuken die als volgt gerangschikt zijn:

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_3}{b_3} \leq \cdots \leq \frac{a_n}{b_n}$$

Hieruit volgt dat $a_1 b_k \leq a_k b_1$ voor elke $k = 1, 2, \dots n$ en dat $a_j b_n \leq a_n b_j$ voor elke $j = 1, 2, \dots n$.

Uit $a_1 b_k \leq a_k b_1$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ volgt

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_1 b_n \leq a_1 b_1 + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_1$$
$$\Leftrightarrow a_1(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leq b_1(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

Hiermee is al één bewering bewezen. Voor de andere bewering gaan we analoog te werk.

Uit $a_j b_n \leq a_n b_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ volgt

$$a_1 b_n + \cdots + a_{n-1} b_n + a_n b_n \leq a_n b_1 + \cdots + a_n b_{n-1} + a_n b_n$$
$$\Leftrightarrow b_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \leq a_n(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leq \frac{a_n}{b_n}$$

Ook de tweede bewering is op die manier bewezen.