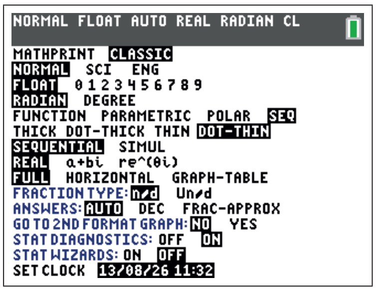
Programmeren in de les wiskunde
Didier Deses

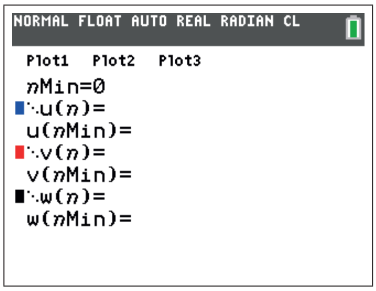
Deze rubriek behandelt de beginselen van het programmeren en zal uitgroeien tot een volledige cursus, met vele motiverende voorbeelden uit de lespraktijk. De programma's zijn op maat gemaakt voor één van de meest verspreide grafische rekentoestellen in Vlaanderen, de TI-84 Plus Color. [1]

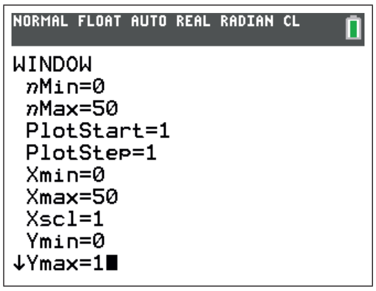
Deel 7: Chaostheorie en bifurcatiediagrammen

De recursieve rij $u_n = au_{n-1}(1 - u_{n-1})$ staat in de biologie bekend als "het model van Verhulst". Voor verschillende waarden van $0 < a < 4$ verandert het convergentiegedrag volledig. Voor meer info refereren we aan de literatuur [2].

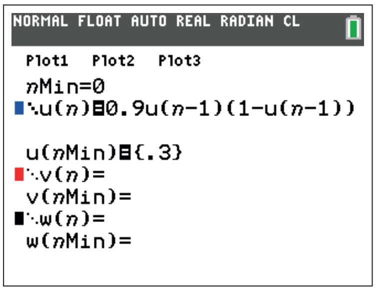
De grafische voorstelling van rijen gaat met de TI-84 Plus Color als volgt. Via `mode` selecteer je `[seq]` en `[dot]`. Als je op `y=` drukt, kun je rijen invoeren. Merk op dat n verkregen wordt door `X,T,θ,n` en u, v, w door bijvoorbeeld `2nd` `[u]` (`2nd` `7`). Voor je de grafiek maakt, doe je er goed aan van met `window` de gewenste grenzen correct in te stellen.

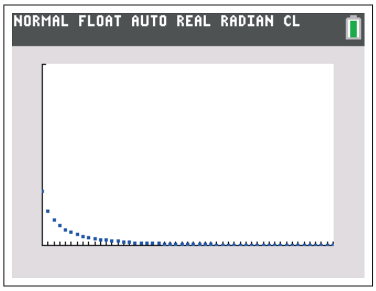


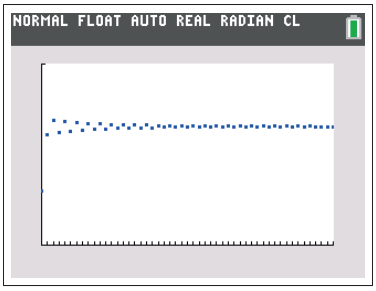




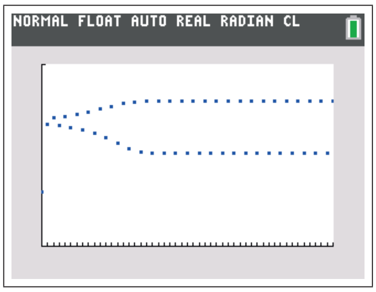
We gebruiken de TI-84 Plus Color om voor verschillende waarden van a de grafiek van de rij te maken.

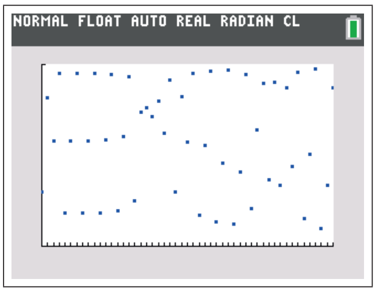






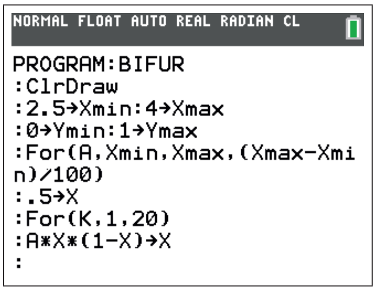
[1] In samenwerking met T^3-Vlaanderen (`http://www.t3vlaanderen.be/`).
[2] H. A. Lauwerier, *Chaos met de Computer*, epsilon-uitgaven, 1996.

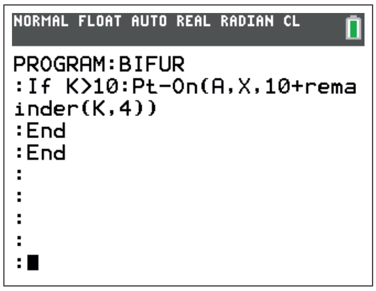


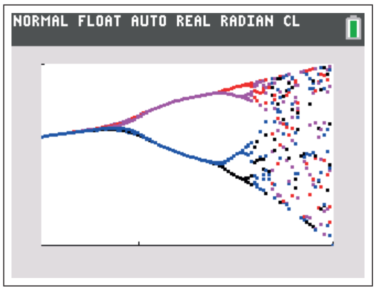


We zien duidelijk dat het convergentiegedrag heel verschillend kan zijn. Eerst convergentie naar 0, daarna naar een constante waarde. Voor grotere a bekomen we adherentie aan twee (of meer) waarden. Dit gebeurt na een zekere stabilisatiefase. Wanneer a de grens van 4 nadert, wordt het gedrag chaotisch.

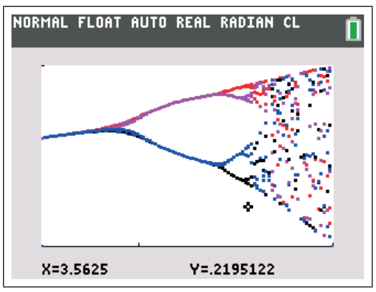
Om dit convergentiegedrag in kaart te brengen, kunnen we een bifurcatiediagram maken. We plaatsen op de x-as de parameter a. Voor elke waarde van a tekenen we de adherentiepunten van de rij, na een stabilisatiefase van 10 termen. Indien de rij adhereert aan twee waarden, zullen dus twee punten getekend worden boven de waarde van a. We kiezen ervoor om de opeenvolgende punten van een rij telkens een andere kleur te geven. Om de vertakkingen duidelijk te kunnen zien beperken we ons tot vier verschillende kleuren.

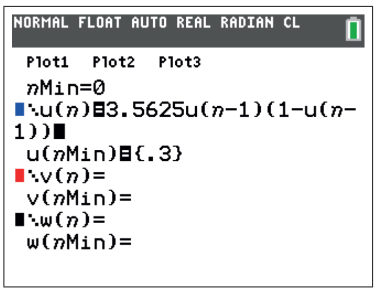


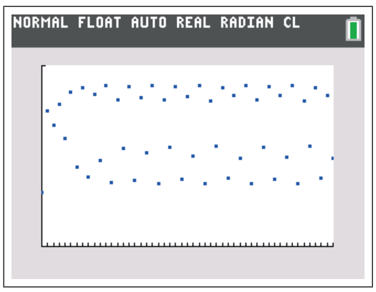




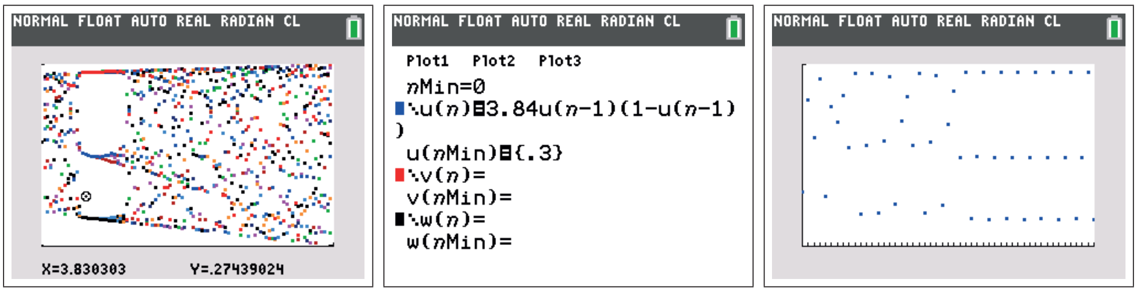
We zien duidelijk het chaotisch gedrag verschijnen. De eerste bifurcatie heeft plaats rond $a = 2{,}8$. De rij zal dan niet meer convergeren maar wel adhereren aan twee waarden. Voor een waarde rond $3{,}4$ (na de volgende bifurcatie) zal de rij adhereren aan vier waarden. Elke tak splitst opnieuw tot het systeem volledig chaotisch wordt. Deze bifurcaties gebeuren niet gelijktijdig, je kan waarden voor a vinden waarvoor er adherentie is aan 3 of 7 waarden.







Midden in het chaotisch gedeelte is er plots weer structuur. We zien dit duidelijk als we $Xmin = 3.8$ stellen.



King of the jungle: Net zoals de vorige keer, geven hier ook een Python-programma dat de bifurcatiediagrammen tekent.

```
from graphics import *
col=["red","green","blue","black"]
xmin,ymin,xmax,ymax=2.5,0,4,1
n=500
win=GraphWin("",n,n)
win.setCoords(xmin,ymin,xmax,ymax)
for i in range(n):
  a=xmin+(xmax-xmin)*i/n
  x=0.5
  for k in range(20):
    x=a*x*(1-x)
    if k>10:win.plot(a,x,col[k%4])
```

Volgende keer: string art!

Dr. Didier Deses kwam in de loop van het secundair onderwijs via de programmeertaal BASIC in aanraking met de Mandelbrotfractaal. Het was het begin van een passie die leidde tot een studie zuivere wiskunde aan de Vrije Universiteit Brussel en een doctoraat in de topologie. Nadien werd hij full-time leerkracht wiskunde aan het KA Koekelberg. Hij blijft ook verbonden aan de VUB waar hij Matlab doceert. Parallel hiermee is hij ook lid T^3-Vlaanderen, geeft hij nascholingen voor leerkrachten en is hij lid van de redactieraad van Wiskunde en Onderwijs.